**CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS** **Epreuve de Mathématiques 1**

**durée 4 heures**

# 1 Partie 1

Une suite numérique est une application $a$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ et sera notée soit par la lettre $a$ soit par la liste des valeurs possibles $(a_n \quad n \in \mathbb{N})$.
$l_1$ désigne l'ensemble des suites $a$ telles que la série $\sum_n \mid a_n \mid$ converge.

**Question 1**
**1-1) Vérifier que l'application $\| \cdot \|_1$ de $l_1$ sur $\mathbb{R}^+$ définie par**

$$\| a \|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mid a_n \mid$$

est une norme sur $l_1$.

1-2) La multiplication $*$ entre deux suites numériques $a$ et $b$ est donnée par : $c = a * b$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k}$$

Vérifier que cette relation définit une loi de composition interne sur $l_1$. Sachant que cette multiplication est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition de $l_1$, trouver un élément neutre $e$ pour la loi $*$ et vérifier :

$$\| a * b \|_1 \leq \| a \|_1 \| b \|_1$$

**1-3) Calculer en fonction de $b$ la suite $c$ lorsque $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ et que $a_n = 0 \quad \forall n > 2$.**

**1-4) Soit la suite $v$ de $l_1$ donnée par :**

$$v_0 = 1 \ , \ v_1 = 0 \ , \ v_2 = 1 \ , \ v_n = 0 \ \forall n > 2$$

**Déterminer une suite numérique $w$ telle que $v * w = e$.**

**1-5) Etant donnés deux éléments de $l_1$, $a$ vérifiant $a_0 \neq 0$ et $c$, trouver une suite numérique $d$ telle que $a * d = c$. La suite $d$ appartient-elle toujours à $l_1$ ?**

**Question 2**
**Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries entières sur $\mathbb{R}$ de rayon de convergence infini ou strictement supérieur à 1.**
**$x$ est fixé dans $[-1, 1]$ et l'élément**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

**de $\mathcal{S}$ sera noté $S_a(x)$, $a$ désignant la suite des coefficients.**

**2-1) $a$ et $b$ appartenant à $l_1$ trouver une relation entre les nombres $S_a(x)$, $S_b(x)$ et $S_{a*b}(x)$.**

**2-2) $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels donnés positifs strictement.**
**Calculer $S_{a*b}(x)$ lorsque**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}$ et $b_n = e^{-\beta} \frac{\beta^n}{n!}$

**2-3)** $a$ **étant un élément de** $l_1$ **calculer en fonction de** $S_a(x)$

$S_b(x)$ **lorsque**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{a_k}{2^n}$$

**Déterminer** $S_{c*a}(x)$ **lorsque** $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = (n+1)\, a_n$.

# 2 Partie 2

$L^2$ **désigne l'ensemble des fonctions** $g$ **de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$, **continues par morceaux, telles que**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)du < +\infty$$

**Question 1**
$x$ **est un réel fixé quelconque.**
**1-1)** $g$ **étant une fonction de** $L^2$ **montrer que** $g_1$ **et** $g_2$ **définies ci-dessous sont aussi éléments de** $L^2$.

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad g_1(u) = g(-u) \ , \ g_2(u) = g(x-u)$$

**1-2) Vérifier que pour** $f$ **et** $g$ **éléments de** $L^2$, **l'intégrale suivante notée** $f * g(x)$ **existe**

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)du$$

**Question 2**
**2-1) A toute fonction** $f$ **de** $L^2$ **est associée la fonction** $A(f)$ **donnée par**

$$A(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, f(u-x)du$$

**Montrer que** $A(f)$ **est paire et atteint son maximum au point 0.**
**Indication :**

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [f(u) + \gamma\, f(u+x)]^2 du \geq 0$$

**2-2) Soit** $f$ **donnée par :**

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \forall x \notin [0,1] \\ f(x) = 1 - x & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

**Vérifier que f appartient à** $L^2$ **et déterminer la fonction** $A(f)$.

# 3 Partie 3

**Dans cette partie, l'entier** $n$ ( $n > 1$) **est fixé et** $f$ **désigne une fonction de classe** $C^{n-1}$ **de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$.

**Question 1**
**Pour toute fonction** $\lambda$, **de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$, **continue par morceaux et nulle en dehors d'un segment** $[-\alpha, +\alpha]$, **et pour toute fonction** $\mu$, **de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$, **continue par morceaux, la fonction** $\mu * \lambda$ **convolée de** $\mu$ **par** $\lambda$ **est définie par :**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mu * \lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u)\, \lambda(x-u)du$$

**Vérifier l'existence de cette intégrale.**

Question 2
Soit $\phi$ la fonction donnée par :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 1 & \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

2-1) Pour $h$ positif strictement $\phi_h$ est définie par $\phi_h(x) = \frac{1}{h}\phi(\frac{x}{h})$.

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_h(u)du$ existe et calculer sa valeur.

Tracer les graphes des fonctions $\phi$, $\phi_3$ et $\phi_{\frac{1}{4}}$.

2-2) La fonction $f_h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(u)du$$

$x$ étant un réel, rechercher la limite de $f_h(x)$ quand $h$ tend vers 0.

2-3) Etablir que

$$f_h(x) = f * \phi_h(x)$$

Question 3

Soit $\beta$ un réel quelconque et $\mu(x) = \phi(x - \beta)$.
Tracer le graphe de la fonction $\mu * \phi$.

Question 4
La suite de fonctions $(\Theta_k \quad k \in \mathbb{N})$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est définie par :

$$\begin{cases} \Theta_0 = \phi \\ \Theta_1 = \Theta_0 * \phi \\ .... \\ \Theta_k = \Theta_{k-1} * \phi \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

4-1) Donner sur un même repère, l'allure des graphes de $\Theta_0$, $\Theta_1$ et $\Theta_2$. Montrer que $\Theta_1$ est continue.

4-2) Etudier la parité de $\Theta_k$ et vérifier que $\Theta_k(x)$ est nul en dehors d'un intervalle borné $I_k$ à déterminer.

4-3) Montrer par récurrence que la fonction $\Theta_k$ est de classe $C^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$ ( $k \in \mathbb{N}^*$).

4-4) Etablir que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_k(u)du = 1$

Question 5
Pour $p$ entier élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction $\psi_p$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par :

$\psi_p(x) = p\,\Theta_n(px)$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(u)du$.

5-1) Soit la suite de fonctions $(f_p \quad p \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f_p = f * \psi_p$.
Montrer que la suite de fonctions $f_p$ converge vers $f$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

5-2) Prouver que la fonction $f_p$ est dérivable et que : $\frac{df_p}{dx} = f * \frac{d\psi_p}{dx} = \frac{df}{dx} * \psi_p$

5-3) Soit $q \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

Montrer que la suite $\frac{d^q f_p}{dx^q}$ des dérivées $q$-ièmes de $f_p$ converge vers $\frac{d^q f}{dx^q}$, dérivée $q$-ième de $f$, lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail